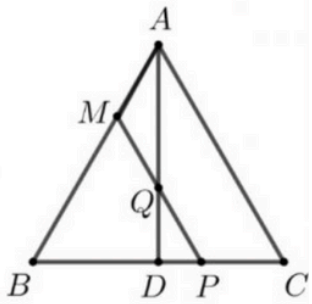
Probleme de geometrie în plan (4)

1. În figura alăturată este reprezentat triunghiul echilateral ABC, cu $AB=3$ cm și înălțimea AD, unde punctul D se află pe latura BC. Punctul M aparține laturii AB, astfel încât $AM=1$ cm. Paralela prin punctul M la dreapta AC intersectează dreapta AD în punctul Q și dreapta BC în punctul P.



(2p) a) Arată că perimetrul triunghiului BMP este egal cu 6cm.

(3p) b) Determină lungimea segmentului PQ.

(Evaluare Națională, 2021)

a) $BM = AB - AM = 3 - 1 = 2$ cm

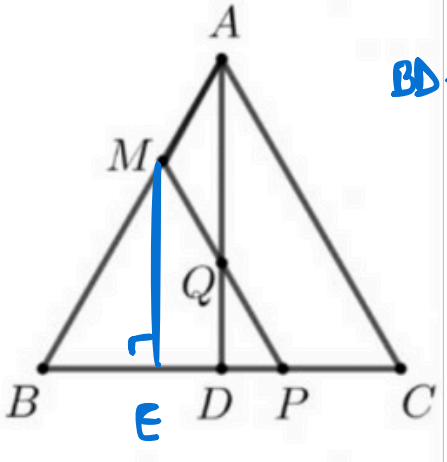
$MP \parallel AC \Rightarrow \triangle BMP \sim \triangle BAC$

$\triangle BAC$ - echilateral $\Big\} \Rightarrow \triangle BMP$ - echilateral $\Rightarrow$

$\Rightarrow P_{\triangle BMP} = 3 \cdot BM = 3 \cdot 2 = 6$ cm

b) Fie $ME \perp BP$, $M \in BP$; $\triangle MBP$ - echilateral $\Rightarrow$

$\Rightarrow M$ - mijlocul lui $BP \Rightarrow PE = \frac{BP}{2} = \frac{2}{2} = 1$ cm



$BD = \frac{BC}{2} = \frac{3}{2} = 1{,}5$ cm; $DP = BP - BD = 2 - 1{,}5 = 0{,}5$ cm

$\left.\begin{matrix} ME \perp BC \\ QD \perp BC \end{matrix}\right\} \Rightarrow QD \parallel ME \Rightarrow \triangle PDQ \sim \triangle PEM \Rightarrow$

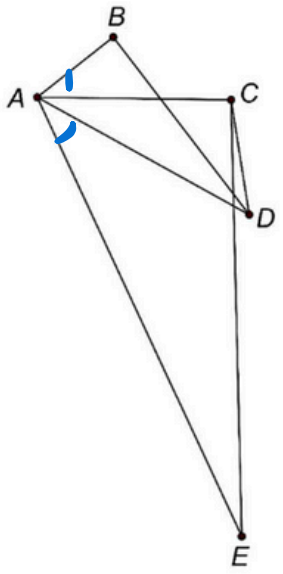
$\Rightarrow \frac{PQ}{PM} = \frac{PD}{PE} \Rightarrow \frac{PQ}{2} = \frac{0{,}5}{1} \Rightarrow$

$\Rightarrow PQ = \frac{0{,}5 \cdot 2}{1} = 1$ cm

2. În figura alăturată sunt reprezentate punctele A, B, C, D și E astfel încât $AB = 4\text{cm}$, $AC = 8\text{cm}$, $AD = 10\text{cm}$ și $AE = 20\text{cm}$. Măsura unghiului BAC este egală cu măsura unghiului DAE și $\sphericalangle CAD = 30°$.

(2p) a) Arată că aria triunghiului CAD este egală cu $20\,\text{cm}^2$.

(3p) b) Demonstrează că $CE = 2 \cdot BD$.



(Evaluare Națională, 2022)

a) $\mathcal{A}_{\Delta CAD} = \frac{AC \cdot AD \cdot \sin CAD}{2} = \frac{8 \cdot 10 \cdot \frac{1}{2}}{2} =$

$= \frac{40}{2} = 20\,cm^2$

b) $\sphericalangle BAC \equiv \sphericalangle DAE \,/ + \sphericalangle CAD \Rightarrow$

$\Rightarrow \sphericalangle BAD \equiv \sphericalangle CAE$

$\frac{AB}{AC} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$; $\frac{AD}{AE} = \frac{10}{20} = \frac{1}{2} \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{AB}{AC} = \frac{AD}{AE}$ $\left.\begin{matrix} \\ \\ \sphericalangle BAD \equiv \sphericalangle CAE \end{matrix}\right\}$ LUL $\Rightarrow \Delta BAD \sim \Delta CAE \Rightarrow \frac{BD}{CE} = \frac{AD}{AE} \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{BD}{CE} = \frac{1}{2} \Rightarrow CE = 2 \cdot BD$

3. În figura alăturată este reprezentat dreptunghiul $ABCD$ cu $AB = 9\sqrt{10}$ cm și $AC = 30$ cm. Dreptele AC și BD se intersectează în punctul O, iar punctul M este mijlocul segmentului CD. Dreptele BC și AM se intersectează în punctul E, iar dreptele OE și CD se intersectează în punctul P.

(2p) a) Arată că aria dreptunghiului $ABCD$ este egală cu 270 cm^2.

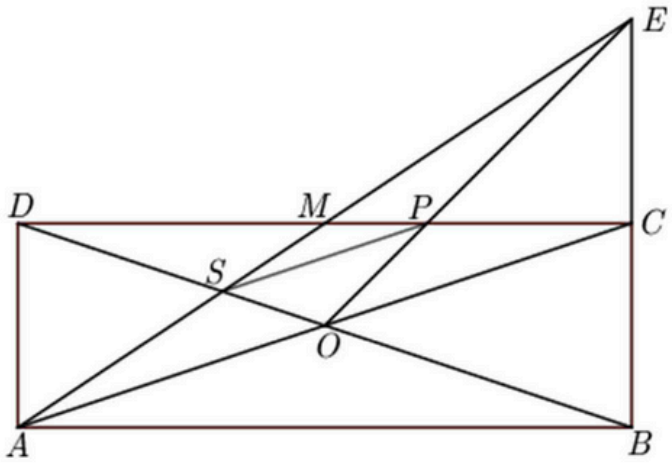
a) ΔABC - dreptunghic în $B \overset{TP}{\Rightarrow}$

$\Rightarrow BC = \sqrt{AC^2 - AB^2} = \sqrt{30^2 - (9\sqrt{10})^2} =$

$= \sqrt{900 - 810} = \sqrt{90} = 3\sqrt{10}$ cm

$A_{ABCD} = AB \cdot BC = 9\sqrt{10} \cdot 3\sqrt{10} =$

$= 270$ cm^2



(3p) b) Arată că lungimea segmentului SP este egală cu 10 cm, unde S este punctul de intersecție a dreptelor AM și BD.

(Evaluare Națională, 2023)

În ΔADC: AM, DO - mediane $\Rightarrow S$ - centrul de greutate $\Rightarrow \frac{MS}{MA} = \frac{1}{3}$

ΔADM și ΔECM (dreptunghice) $\left| \begin{array}{l} DM \equiv MC \\ \sphericalangle DMA \equiv \sphericalangle CME \\ \text{(opuse la vârf)} \end{array} \right\} \overset{C.U.}{\Rightarrow} \Delta ADM \equiv \Delta ECM \Rightarrow$

$\Rightarrow AM \equiv ME \Rightarrow M$ - mijlocul lui $[AE]$

În ΔAEC: CM, EO - mediane $\Rightarrow P$ - centrul de greutate $\Rightarrow \frac{MP}{MC} = \frac{1}{3}$

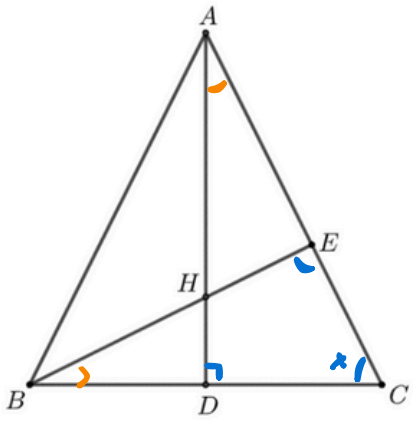
$\frac{MS}{MA} = \frac{MP}{MC} \overset{R.T.Th}{\Rightarrow} SP \parallel AC \overset{TFA}{\Rightarrow} \Delta MSP \sim \Delta MAC \Rightarrow \frac{SP}{AC} = \frac{MS}{MA} \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{SP}{30} = \frac{1}{3} \Rightarrow SP = \frac{30}{3} = 10$ cm

4. În figura alăturată este reprezentat triunghiul isoscel ABC cu $AB = AC$. Înălțimea din vârful A intersectează latura BC în punctul D și $AD = BC$. Înălțimea din vârful B intersectează latura AC în punctul E. Înălțimile AD și BE se intersectează în punctul H.

(2p) a) Arată că unghiurile DAC și EBC au aceeași măsură.

(3p) b) Demonstrează că $AH = 3 \cdot HD$.



(Evaluare Națională, 2024)

a) Notăm $\sphericalangle ACB = x$

$\left.\begin{array}{l} \text{În } \triangle BEC: \sphericalangle EBC = 90^\circ - \sphericalangle BCE = 90^\circ - x \\ \text{În } \triangle ADC: \sphericalangle DAC = 90^\circ - \sphericalangle ACD = 90^\circ - x \end{array}\right\} \Rightarrow$

$\Rightarrow \sphericalangle EBC \equiv \sphericalangle DAC$

b) $\left.\begin{array}{l} \sphericalangle HBD \equiv \sphericalangle DAC \\ \sphericalangle BDH \equiv \sphericalangle ADC \end{array}\right\} \overset{U.U.}{\Rightarrow} \triangle BDH \sim \triangle ADC \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{BD}{AD} = \frac{DH}{DC} \Rightarrow DH = \frac{DC \cdot BD}{AD}$

$\triangle ABC$ - isoscel, AD - înălțime $\Rightarrow AD$ - mediană $\Rightarrow$

$\Rightarrow D$ - mijlocul lui $BC \Rightarrow BD = DC = \frac{BC}{2}$

$DH = \frac{\frac{BC}{2} \cdot \frac{BC}{2}}{AD} = \frac{BC^2}{4} : AD = \frac{BC^2}{4} \cdot \frac{1}{AD} = \frac{BC^2}{4AD}$, dar $BC = AD \Rightarrow$

$\Rightarrow DH = \frac{AD^2}{4AD} = \frac{AD}{4} \Rightarrow AD = 4DH \Rightarrow AH + DH = 4DH \Rightarrow AH = 3DH$