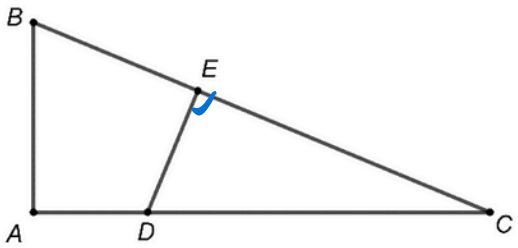
Probleme de geometrie în plan (3)

1. În figura alăturată este reprezentat triunghiul ABC dreptunghic în A, $AB=5\text{cm}$ și $AC=12\text{cm}$. Punctul D aparține segmentului AC astfel încât $DC=3AD$. Perpendiculara din punctul D pe dreapta BC intersectează latura BC în punctul E.



(2p) a) Arată că sinusul unghiului ACB este egal cu $\frac{5}{13}$.

(3p) b) Arată că lungimea segmentului DE este mai mică decât $3,5\text{cm}$.

(Simulare, 2021)

a) ΔABC - dreptunghic în $A \overset{TP}{\Rightarrow} BC=\sqrt{AB^2+AC^2}=\sqrt{5^2+12^2}=\sqrt{25+144}=$

$=\sqrt{169}=13\text{cm}$

$\sin ACB=\frac{AB}{BC}=\frac{5}{13}$

b) $AD+DC=AC \Rightarrow AD+3AD=12 \Rightarrow 4AD=12 \Rightarrow AD=3\text{cm} \Rightarrow$

$\Rightarrow DC=3\cdot 3=9\text{cm}$

ΔDEC - dreptunghic în $E \Rightarrow \sin DCE=\frac{DE}{DC} \Rightarrow \frac{5}{13}=\frac{DE}{9} \Rightarrow$

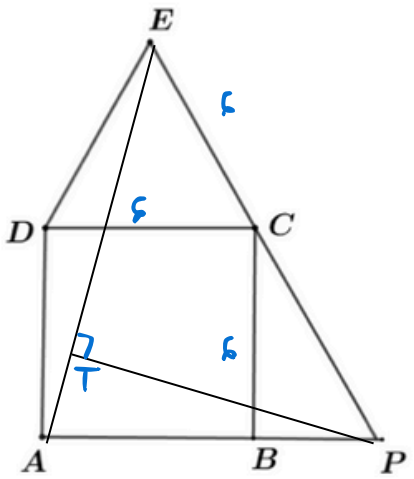
$\Rightarrow DE=\frac{5\cdot 9}{13}=\frac{45}{13}\text{cm}$

$\frac{45}{13}<3,5 \Leftrightarrow {}^{\cdot 7}/_{45} \; {}^{\cdot 9}/_{35} \Leftrightarrow \frac{315}{91}<\frac{315}{90}$ Adevărat $\Rightarrow$

$\Rightarrow DE<3,5\text{cm}$

2. În figura alăturată este reprezentat pătratul $ABCD$ și triunghiul echilateral CDE cu $EC=6\text{cm}$. Dreptele EC și AB se intersectează în punctul P.

(2p) a) Arată că $CP=4\sqrt{3}\,\text{cm}$.



$DC \parallel AB \Rightarrow DC \parallel AP$, EP - secantă $\Rightarrow \sphericalangle ECD = \sphericalangle CPB = 60^\circ$ (corespondente)

ΔCBP - dreptunghic în $B \Rightarrow$

$\Rightarrow \sin \sphericalangle CPB = \frac{BC}{CP} \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{6}{CP} \Rightarrow$

$\Rightarrow CP = \frac{6 \cdot 2}{\sqrt{3}} = \frac{12}{\sqrt{3}} = \frac{12\sqrt{3}}{3} = 4\sqrt{3}\,\text{cm}$

(3p) b) Arată că distanța de la punctul P la dreapta AE este egală cu $\sqrt{2}\left(3+2\sqrt{3}\right)\text{cm}$.

(Simulare, 2022)

$\sphericalangle ADE = \sphericalangle ADC + \sphericalangle BDC = 90^\circ + 60^\circ = 150^\circ$

$AD = DE \Rightarrow \Delta ADE$ - isoscel $\Rightarrow \sphericalangle DEA = \frac{180^\circ - \sphericalangle ADE}{2} = \frac{180^\circ - 150^\circ}{2} = \frac{30^\circ}{2} = 15^\circ$

$\sphericalangle AEP = \sphericalangle DEC - \sphericalangle DEA = 60^\circ - 15^\circ = 45^\circ$

$EP = EC + CP = 6 + 4\sqrt{3} = 2(3+2\sqrt{3})\,\text{cm}$

Fie $PT \perp AE$, $T \in AE \Rightarrow d(P, AE) = PT$

ΔPTE - dreptunghic în $T \Rightarrow \cos \sphericalangle PET = \frac{PT}{EP} \Rightarrow \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{PT}{2(3+2\sqrt{3})} \Rightarrow$

$\Rightarrow PT = \frac{\sqrt{2} \cdot 2(3+2\sqrt{3})}{2} = \sqrt{2}(3+2\sqrt{3})\,\text{cm}$

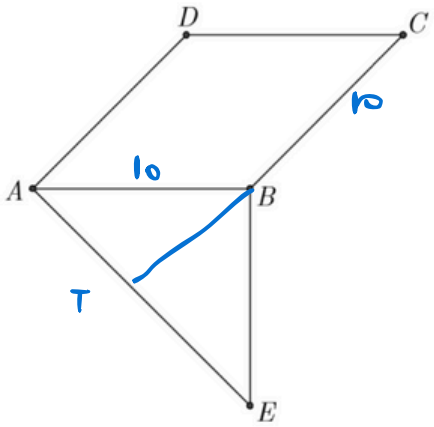
3. În figura alăturată sunt reprezentate rombul $ABCD$ cu măsura unghiului BAD egală cu $45°$ și riunghiul dreptunghic isoscel ABE cu $AB = BE = 10\text{cm}$. Punctele C și E sunt de o parte și de alta a lreptei AB.

2p) a) Arată că dreapta DA este perpendiculară pe dreapta AE.

ΔABE – dreptunghic isoscel $\Rightarrow \sphericalangle BAE = 45°$

$\sphericalangle DAE = \sphericalangle DAB + \sphericalangle BAE = 45° + 45° = 90° \Rightarrow$

$\Rightarrow DA \perp AE$



(3p) b) Arată că tangenta unghiului CAE este egală cu $\sqrt{2}+1$.

(Simulare, 2023)

Fie $CB \cap AE = \{T\}$

$AD \parallel BC$ și $AD \perp AE \Rightarrow CT \perp AE$

ΔABE – dreptunghic în $B \Rightarrow \cos \widehat{BAE} = \frac{AB}{AE} \Rightarrow \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{10}{AE} \Rightarrow AE = \frac{10 \cdot 2}{\sqrt{2}} = \frac{20}{\sqrt{2}} =$

$= \frac{20\sqrt{2}}{2} = 10\sqrt{2}$ cm

ΔABE – dreptunghic isoscel, BT – înălțime $\Rightarrow BT$ – mediană

$BT = \frac{AE}{2} = \frac{10\sqrt{2}}{2} = 5\sqrt{2}$ cm, $AT = 5\sqrt{2}$ cm

$CT = CB + BT = 10 + 5\sqrt{2}$ cm

ΔATC – dreptunghic în $T \Rightarrow \text{tg}\, \widehat{CAT} = \frac{CT}{AT} = \frac{10 + 5\sqrt{2}}{5\sqrt{2}} =$

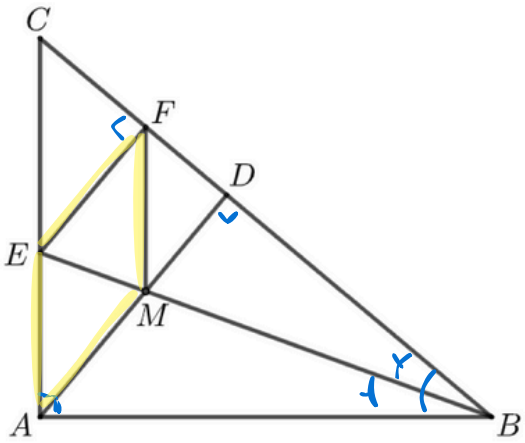
$= \frac{2}{5\sqrt{2}} + \frac{5\sqrt{2}}{5\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} + 1 = \frac{2\sqrt{2}}{2} + 1 = \sqrt{2} + 1$

Deci $\text{tg}\, \widehat{CAE} = \sqrt{2} + 1$.

4. În figura alăturată este reprezentat triunghiul dreptunghic ABC, cu $\sphericalangle A = 90°$ și $\sphericalangle B = 40°$. Semidreapta BE este bisectoarea unghiului ABC, punctul E aparține segmentului AC. Perpendiculara din punctul A pe BC intersectează dreapta BC în punctul D, iar perpendiculara din punctul E pe BC intersectează dreapta BC în punctul F. Dreptele BE și AD se intersectează în punctul M.

(2p) a) Arată că măsura unghiului EMA este egală cu $70°$.

(3p) b) Arată că patrulaterul $AMFE$ este romb.



(Simulare, 2024)

a) $\sphericalangle ABE = \sphericalangle EBC = \frac{\sphericalangle ABC}{2} = \frac{40°}{2} = 20°$

ΔMDB: $\sphericalangle DMB = 90° - \sphericalangle MBD = 90° - 20° = 70°$

$\sphericalangle EMA \equiv \sphericalangle DMB$ (opuse la vârf) $\Rightarrow$

$\Rightarrow \sphericalangle EMA = 70°$

b) $EF \perp BC$ și $AD \perp BC \Rightarrow EF \parallel AD \Rightarrow EF \parallel AM$

ΔAEB: $\sphericalangle AEB = 90° - \sphericalangle ABE = 90° - 20° = 70°$ $\Rightarrow$

$\Rightarrow \sphericalangle AEM \equiv \sphericalangle EMA \Rightarrow \Delta EMA$ - isoscel $\Rightarrow AM \equiv AE$

ΔEFB și ΔEAB (dreptunghice) | BE - latură comună; $\sphericalangle ABE \equiv \sphericalangle FBE$ $\Big\}$ I.U. $\Rightarrow \Delta EFB \equiv \Delta EAB \Rightarrow EF \equiv EA \Rightarrow$

$\Rightarrow EF \equiv AM$, $EF \parallel AM$ $\Big\} \Rightarrow AMFE$ - paralelogram $\Big\} \Rightarrow AMFE$ - romb

$AM \equiv AE$