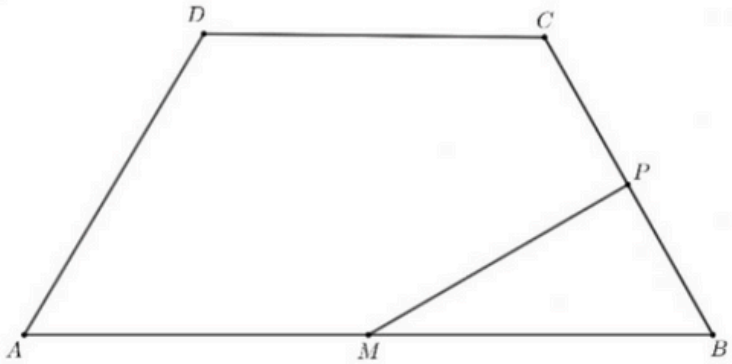
Probleme de geometrie în plan (2)

1. Se consideră trapezul isoscel $ABCD$, cu $AB \| CD$, măsura unghiului ADC este egală cu $120°$ și $AD = DC = 6$ cm. Dreapta MP este mediatoarea segmentului BC, unde punctul M aparține dreptei AB și punctul P aparține dreptei BC.

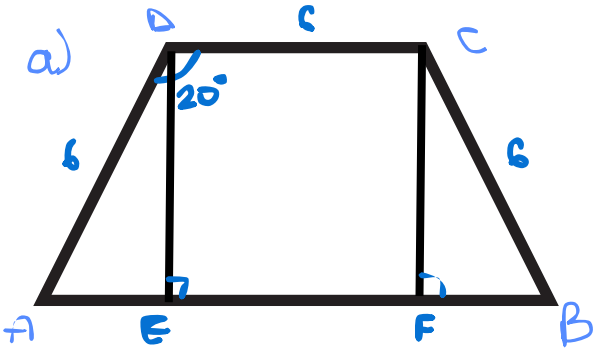


(2p) a) Arată că $AB = 12$ cm.

(3p) b) Demonstrează că dreptele DM și MP sunt perpendiculare.

Evaluare Națională, 2021)

a)



Fie $DE \perp AB$, $CF \perp AB$, $E, F \in AB \Rightarrow$

$\Rightarrow DEFC$ - dreptunghi $\Rightarrow DC = EF = 6$ cm

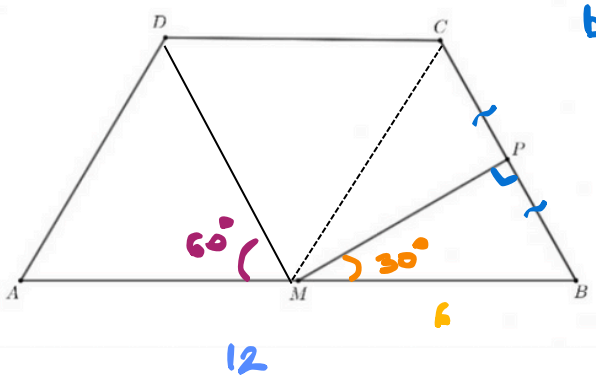
$ABCD$ - trapez isoscel $\Rightarrow AE = FB$

$\measuredangle DAB = 180° - \measuredangle ADC = 180° - 120° = 60° \Rightarrow$

$\Rightarrow \measuredangle ABC = 30°$

ΔCFB - dreptunghic în $F \Rightarrow \cos \hat{CBF} = \frac{FB}{BC} \Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{FB}{6} \Rightarrow FB = \frac{6}{2} = 3$ cm

$AB = AE + EF + FB = 3 + 6 + 3 = 12$ cm



b) PM - mediatoarea segmentului $BC \Rightarrow$

$\Rightarrow MB = MC \Rightarrow \Delta MBC$ - isoscel $\} \Rightarrow \measuredangle MBC = 60°$

$\Rightarrow \Delta MBC$ - echilateral $\Rightarrow MB = BC = 6$ cm

ΔMBC - echilateral $\}$ $\Rightarrow MP$ - bisectoare $\Rightarrow$

MP - mediatoare

$\Rightarrow \measuredangle PMB = \frac{\measuredangle CMB}{2} = \frac{60°}{2} = 30°$

$AM = AB - MB = 12 - 6 = 6$ cm $\Rightarrow AM = AD \Rightarrow \Delta AMD$ - isoscel $\} \Rightarrow$

$\measuredangle DAM = 60°$

$\Rightarrow \Delta DAM$ - echilateral $\Rightarrow \measuredangle DMA = 60°$

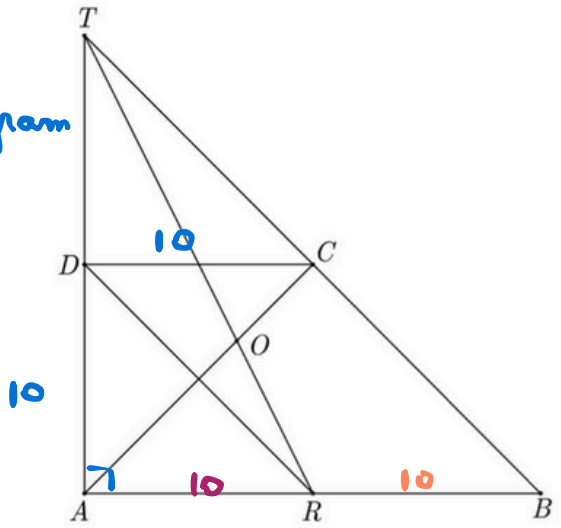
$\measuredangle DMP = 180° - \measuredangle DMA - \measuredangle PMB = 180° - 60° - 30° = 90° \Rightarrow DM \perp MP$

Probleme de geometrie în plan (2)

2. În figura alăturată este reprezentat trapezul dreptunghic $ABCD$ cu $AB \| CD$, $\sphericalangle ABC = 45°$ și $AD = CD = 10$ cm. Paralela prin D la dreapta BC intersectează dreapta AB în punctul R. Dreptele AD și BC se intersectează în punctul T și O este punctul de intersecție a dreptelor TR și AC.

(2p) a) Arată că punctul R este mijlocul segmentului AB.

(3p) b) Calculează lungimea segmentului TO.



(Evaluare Națională, 2022)

a) $DC \| AB \Rightarrow DC \| RB$, $DR \| BC \Big\} \Rightarrow BCDR$ - paralelogram

$\Rightarrow BR = CD = 10$ cm

$DR \| BC \Rightarrow \sphericalangle DRA = \sphericalangle CBA = 45°$ (corespondente)

$\sphericalangle DAR = 90°$, și $\sphericalangle DRA = 45° \Rightarrow$

$\Rightarrow \Delta DAR$ - dreptunghic isoscel $\Rightarrow$

$\Rightarrow AR = DA = 10$ cm

Deci, $AR = RB \Rightarrow R$ - mijlocul lui AB

b) $AB = 20$ cm $\Rightarrow DC = \frac{AB}{2}$ și $DC \| AB \Rightarrow DC$ - linie mijlocie în ΔTAR

$\Rightarrow D$ - mijlocul lui AT și C - mijlocul lui TB

În ΔTAB: TR, AC - mediane $\Big\} \Rightarrow O$ - centru de greutate $\Rightarrow$

$TR \cap AC = \{O\}$

$\Rightarrow TO = \frac{2}{3} \cdot TR$

$AT = 2AD = 2 \cdot 10 = 20$ cm

ΔTAR - dreptunghic în $A \overset{TP}{\Rightarrow} TR = \sqrt{TA^2 + AR^2} = \sqrt{20^2 + 10^2} =$

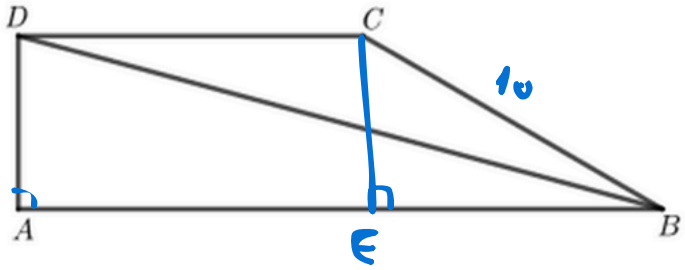
$= \sqrt{400 + 100} = \sqrt{500} = 10\sqrt{5}$ cm

$TO = \frac{2}{3} \cdot 10\sqrt{5} = \frac{20\sqrt{5}}{3}$ cm

3. În figura alăturată este reprezentat trapezul dreptunghic $ABCD$ cu $AB \| CD$ și $BC = 10$ cm. Semidreapta BD este bisectoarea unghiului ABC și măsura unghiului ABD este egală cu $15°$.

(2p) a) Determină măsura unghiului BCD.

(3p) b) Arată că $AB - AD < 14$ cm.



(Evaluare Națională, 2023)

a) $\sphericalangle ABC = 2 \cdot \sphericalangle ABD = 2 \cdot 15 = 30°$

$\sphericalangle BCD = 180° - \sphericalangle ABC = 180° - 30° = 150°$

b) $DC \| AB \Rightarrow \sphericalangle ABD \equiv \sphericalangle BDC$ (alterne interne) $\Rightarrow$

BD - bisectoarea $\sphericalangle ABC \Rightarrow \sphericalangle ABD \equiv \sphericalangle DBC$

$\Rightarrow \sphericalangle BDC \equiv \sphericalangle DBC \Rightarrow \Delta DCB$ - isoscel $\Rightarrow DC = BC = 10$ cm

Fie $CE \perp AB$, $E \in AB \Rightarrow AECD$ - dreptunghi $\Rightarrow$

$\Rightarrow AE = DC = 10$ cm, $AD = CE$

ΔCEB - dreptunghic în $E \Rightarrow \sin CBE = \frac{CE}{CB} \Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{CE}{10} \Rightarrow$

$\Rightarrow CE = \frac{10}{2} = 5$ cm $\Rightarrow AD = 5$ cm

$\cos \widehat{CBE} = \frac{EB}{BC} \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{EB}{10} \Rightarrow EB = \frac{10\sqrt{3}}{2} = 5\sqrt{3}$ cm

$AB = AE + EB = 10 + 5\sqrt{3}$ cm

$AB - AD = 10 + 5\sqrt{3} - 5 = 5 + 5\sqrt{3}$ cm

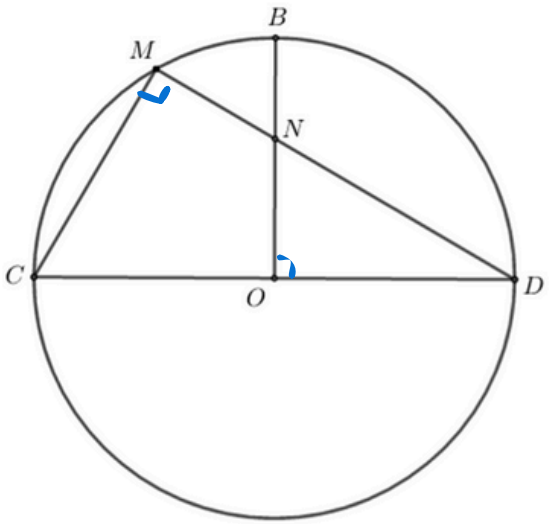
$5 + 5\sqrt{3} < 14 \Leftrightarrow 5\sqrt{3} < 9 \Leftrightarrow \sqrt{75} < \sqrt{81}$ adevărat $\Rightarrow$

$\Rightarrow AB - AD < 14$ cm

4. În figura alăturată este reprezentat cercul de centru O, în care CD este diametru. Punctul B aparține cercului astfel încât dreptele BO și CD sunt perpendiculare. Punctul M aparține arcului mic BC, dreptele DM și BO se intersectează în punctul N, $DN = 2 \cdot MN$ și $MN = 4$ cm.

(2p) a) Arată că măsura unghiului CMD este egală cu $90°$.

(3p) b) Calculează aria triunghiului DON.



(Evaluare Națională, 2024)

a) CD - diametru $\Rightarrow \overset{\frown}{CD} = 180°$

$\measuredangle CMD$ - înscris în cerc $\Rightarrow$

$\Rightarrow \measuredangle CMD = \frac{\overset{\frown}{CD}}{2} = \frac{180°}{2} = 90°$

b) $DN = 2MN = 2 \cdot 4 = 8$ cm

$\measuredangle NOB \equiv \measuredangle CMD$ (u.v.)

$\measuredangle NDO \equiv \measuredangle CDM$ (u.v.)

$\Rightarrow \Delta NOD \sim \Delta CMD \Rightarrow$

$\rightarrow \frac{OD}{MD} = \frac{ND}{CD}$; $CD = 2 \cdot OD$; $MD = MN + ND = 4 + 8 = 12$ cm

$\frac{OD}{12} = \frac{8}{2OD} \Rightarrow 2OD^2 = 96 \Rightarrow OD^2 = 48 \Rightarrow OD = \sqrt{48} = 4\sqrt{3}$ cm

ΔNOD - dreptunghic în $O \overset{TP}{\Rightarrow} NO = \sqrt{ND^2 - OD^2} = \sqrt{8^2 - (4\sqrt{3})^2} =$

$= \sqrt{64 - 48} = \sqrt{16} = 4$ cm

$$\mathcal{A}_{\Delta NOD} = \frac{NO \cdot OD}{2} = \frac{4 \cdot 4\sqrt{3}}{2} = 8\sqrt{3} \text{ cm}^2$$