100 de zile PÂNĂ LA EXAMEN

Probleme de geometrie în plan (1)

1. În figura alăturată este reprezentat trapezul isoscel $ABCD$ cu $AB \| CD$, $AD = BC = 6\text{cm}$ și $AB = 2CD = 8\text{cm}$. Punctul M este mijlocul segmentului AB.

(2p) a) Arată că perimetrul triunghiului ADM este egal cu 16cm.

$2CD = 8 \Rightarrow CD = 4\text{ cm}$

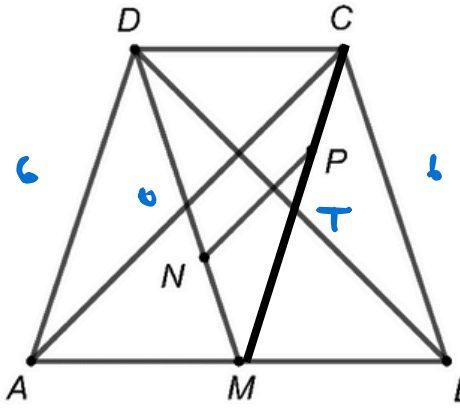
$AM = MB = \frac{AB}{2} = \frac{8}{2} = 4\text{ cm}$ $\Big\}\Rightarrow$

$\Rightarrow CD \equiv MB$

$CD \| MB$ $\Big\}\Rightarrow BCDM$ - paralelogram $\Rightarrow$

$\Rightarrow DM = BC = 6\text{ cm}$

$P_{\Delta ADM} = AD + DM + AM = 6 + 6 + 4 = 16\text{ cm}$



(3p) b) Știind că punctul N aparține segmentului DM astfel încât $DN = 4\text{cm}$ și punctul P este centrul de greutate al triunghiului BCD, demonstrează că dreptele NP și AC sunt paralele.

(Simulare, 2021)

$CP \cap DB = \{T\} \Rightarrow T$ - mijlocul lui BD $\Big\}\Rightarrow C, T, M$ - colineare

$BCDM$ - paralelogram

și T - mijlocul lui CM

$PC = \frac{2}{3} \cdot PT = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot MC = \frac{1}{3} \cdot MC \Rightarrow \frac{PC}{MC} = \frac{1}{3} \Rightarrow$

$\Rightarrow MC = 3PC \Rightarrow MP + PC = 3PC \Rightarrow MP = 2PC \Rightarrow \frac{MP}{PC} = 2$

$DC \| AM$ și $DC = AM \Rightarrow AMCD$ - paralelogram $\Big\}\Rightarrow$

Fie $AC \cap MD = \{O\}$

$\Rightarrow O$ - mijlocul lui $MD \Rightarrow MO = \frac{MD}{2} = \frac{6}{2} = 3\text{ cm}$

$MN = DM - DN = 6 - 4 = 2\text{ cm}$; $NO = MO - MN = 3 - 2 = 1\text{ cm}$

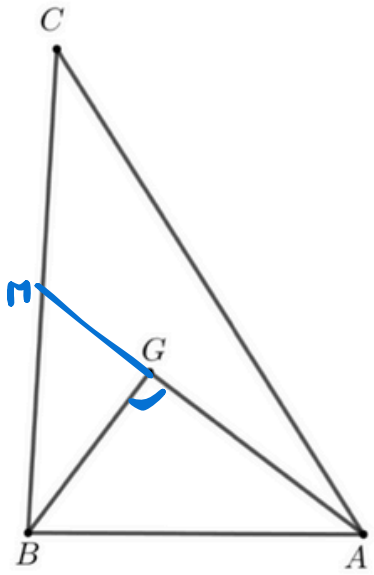
$\frac{MN}{NO} = \frac{2}{1} = 2$

Deci, $\frac{MP}{PC} = \frac{MN}{NO} \overset{RTTh}{\Rightarrow} PN \| CO \Rightarrow PN \| AC$

2. În figura alăturată este reprezentat triunghiul ABC. Punctul G este centrul de greutate al triunghiului ABC, $AG=4\text{cm}$, $BG=3\text{cm}$ și dreptele AG și BG sunt perpendiculare.

(2p) a) Arată că perimetrul triunghiului ABG este egal cu 12cm.

3p) b) Determină lungimea segmentului BC.



(Simulare, 2022)

a) ΔAGB - dreptunghic în $G \overset{TP}{\Rightarrow}$

$\Rightarrow AB=\sqrt{GB^2+GA^2}=\sqrt{3^2+4^2}=\sqrt{9+16}=$

$=\sqrt{25}=5\text{cm}$

$P_{\Delta ABG}=AB+BG+AG=5+3+4=12\text{cm}$

b) Fie $AG \cap BC=\{M\} \Rightarrow M$ - mijlocul lui BC

$BM=\frac{AG}{2}=\frac{4}{2}=2\text{cm}$

ΔBGM - dreptunghic în $G \overset{TP}{\Rightarrow} BM=\sqrt{GM^2+BG^2}=\sqrt{2^2+3^2}=$

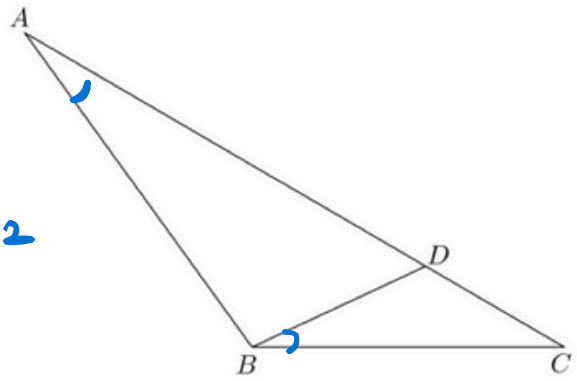
$=\sqrt{4+9}=\sqrt{13}\text{ cm}$

$BC=2\cdot BM=2\sqrt{13}\text{ cm}$

3. În figura alăturată este reprezentat triunghiul ABC cu $BC = 10\text{cm}$, $AC = 20\text{cm}$ și măsura unghiului ACB este egală cu $30°$. Punctul D aparține segmentului AC, astfel încât unghiul DBC este congruent cu BAC.

(2p) a) Arată că aria triunghiului ABC este egală cu $50\,\text{cm}^2$.

(3p) b) Calculează lungimea segmentului CD.



(Simulare, 2023)

a) $\mathcal{A}_{ABC} = \frac{CB \cdot CA \cdot \sin ACB}{2} =$

$= \frac{10 \cdot 20 \cdot \frac{1}{2}}{2} = \frac{100}{2} = 50\,\text{cm}^2$

b) $\left.\begin{matrix} \sphericalangle BDC \equiv \sphericalangle BAC \\ \sphericalangle DCB \equiv \sphericalangle ACB \end{matrix}\right\} \overset{UU}{\Rightarrow} \Delta BCD \sim \Delta ACB \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{BC}{AD} = \frac{CD}{BC} \Rightarrow \frac{10}{20} = \frac{CD}{10} \Rightarrow CD = \frac{10 \cdot 10}{20} \Rightarrow$

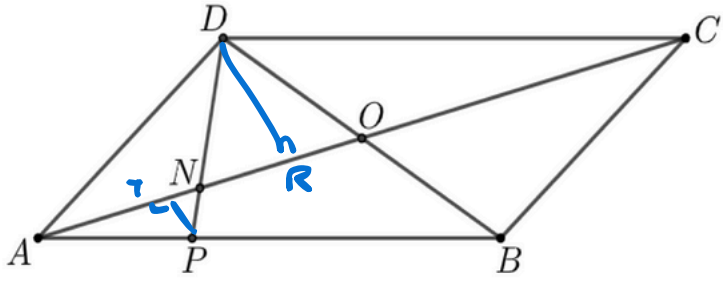
$\Rightarrow CD = \frac{100}{20} = 5\,\text{cm}$

4. În figura alăturată este reprezentat paralelogramul $ABCD$ cu $AB=15$ cm. Punctul P aparține laturii AB, astfel încât $PB=2AP$ și O este punctul de intersecție a dreptelor AC și BD.

(2p) a) Arată că lungimea segmentului AP este egală cu 5 cm.

$AP+PB=AB \Rightarrow AP+2AP=15 \Rightarrow$

$\Rightarrow 3AP=15 \Rightarrow AP=5$ cm



(3p) b) Determină raportul dintre aria triunghiului ANP și aria triunghiului DNO, unde N este punctul de intersecție a dreptelor AC și DP.

(Simulare, 2024)

$AP \parallel DC \overset{TFA}{\Rightarrow} \triangle ANP \sim \triangle CND \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{AN}{NC}=\frac{NP}{ND}=\frac{AP}{DC}=\frac{5}{15}=\frac{1}{3} \Rightarrow NC=3AN$

$AN+NC=AC \Rightarrow AN+3AN=AC \Rightarrow 4AN=AC$, dar $AC=2AD \Rightarrow$

$\Rightarrow 4AN=2AD \mid :2 \Rightarrow 2AN=AD \Rightarrow N$ - mijlocul lui $AD \Rightarrow AN=NO$

Fie $PT \perp AO$, $DR \perp AO$, $T, R \in AO \Rightarrow PT \parallel DR \overset{TFA}{\Rightarrow}$

$\Rightarrow \triangle PTN \sim \triangle DRN \Rightarrow \frac{PT}{DR}=\frac{NP}{ND}=\frac{1}{3}$

$\mathcal{A}_{\triangle ANP}=\frac{PT \cdot AN}{2}$; $\mathcal{A}_{\triangle DNO}=\frac{NR \cdot NO}{2}$

$\frac{\mathcal{A}_{\triangle ANP}}{\mathcal{A}_{\triangle DNO}}=\frac{PT \cdot AN}{2} : \frac{DR \cdot NO}{2}=\frac{PT \cdot AN}{2} \cdot \frac{2}{DR \cdot NO}=$

$=\frac{PT}{DR} \cdot \frac{AN}{NO}$, dar $AN=NO \Rightarrow \frac{AN}{NO}=1$

Deci, $\frac{\mathcal{A}_{\triangle ANP}}{\mathcal{A}_{\triangle DNO}}=\frac{1}{3} \cdot 1=\frac{1}{3}$