Probleme care se rezolvă cu ajutorul ecuațiilor și a sistemelor de ecuații. Probleme de divizibilitate

1. Oana începe să citească o carte. În prima zi citește jumătate din numărul paginilor cărții, în a doua zi jumătate din rest, iar în a treia zi citește jumătate din numărul paginilor rămase și constată că mai are de citit 32 de pagini.

(2p) a) Dacă ar continua să citească zilnic jumătate din numărul de pagini rămase, câte pagini ar avea de citit în cea de-a cincea zi?

(3p) b) Determină numărul de pagini ale cărții.

(Simulare, 2021)

a) Zi 4: 32:2 = 16, rest: 32 - 16 = 16

Zi 5: 16 : 2 = 8 pagini

b) n - numărul de pagini ale cărții

$n = \frac{n}{2} + \frac{n}{4} + \frac{n}{8} + 32 \mid \cdot 8 \Rightarrow 8n = 4n + 2n + n + 256 \Rightarrow$

$\Rightarrow 8n = 7n + 256 \Rightarrow n = 256$ pagini

2. Suma a două numere naturale a și b este egală cu 42. Cel mai mare divizor comun al numerelor a și b este 7.

(2p) a) Numerele 14 și 28 îndeplinesc condițiile din enunț? Justifică răspunsul dat.

(3p) b) Determină numerele naturale a și b, $a < b$, care îndeplinesc condițiile din enunț.

(Simulare, 2022)

a) Nu, deoarece cel mai mare divizor comun al numerelor 14 și 28 este 14.

b) $a + b = 42$

$(a, b) = 7 \Rightarrow a = 7x,\ b = 7y,\ x, y \in \mathbb{N},\ (x, y) = 1$

$a < b \Rightarrow x < y$

$7x + 7y = 42 \Rightarrow 7(x + y) = 42 \mid :7 \Rightarrow$

$\Rightarrow x + y = 6$, dar $x < y$ și $(x, y) = 1 \Rightarrow x = 1,\ y = 5 \Rightarrow$

$\Rightarrow a = 7,\ b = 35$

100 de zile PÂNĂ LA EXAMEN

3. Într-un bloc de locuințe sunt 22 de apartamente cu două, respectiv cu patru camere, în total fiind 60 de camere.

(2p) a) Este posibil ca în acest bloc să fie 16 apartamente cu patru camere? Justifică răspunsul dat.

(3p) b) Determină numărul de apartamente cu două camere din acest bloc.

(Simulare, 2023)

a) $16 \cdot 4 = 64 > 60 \Rightarrow$ nu pot fi 16 apartamente cu 4 camere

b) x - numărul apartamentelor cu două camere
y - numărul apartamentelor cu trei camere

$$\begin{cases} x+y=22 \mid \cdot(-4) \\ 2x+4y=60 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -4x-4y=-88 \\ 2x+4y=60 \end{cases} \oplus$$

$-2x = -28 \mid :(-2)$

$x = 14$ apartamente cu două camere

4. Maria aranjează cărțile din bibliotecă și observă că dacă le grupează câte 8, câte 12 sau câte 18 îi rămân de fiecare dată 5 cărți.

(2p) a) Verifică dacă Maria poate avea în bibliotecă 53 de cărți. Justifică răspunsul dat.

(3p) b) Determină numărul cărților din biblioteca Mariei, știind că acesta este cel mai mic număr natural de trei cifre cu proprietățile din enunț.

(Simulare, 2024)

a) $53 : 8 = 6$ (48, =5) $\quad 53 : 12 = 4$ (48, =5) $\quad 53 : 18 = 2$ (36, 17)

$17 \neq 5 \Rightarrow$ nu poate avea 53 de cărți

b) n - numărul cărților

Din TîR: $n = 8c_1 + 5 \Rightarrow n-5 = 8c_1 \Rightarrow (n-5) : 8$
$n = 12c_2 + 5 \Rightarrow n-5 = 12c_2 \Rightarrow (n-5) : 12$
$n = 18c_3 + 5 \Rightarrow n-5 = 18c_3 \Rightarrow (n-5) : 18$
$\Rightarrow$

$c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{N}$

$\Rightarrow (n-5) : (8, 12, 18) \Rightarrow (n-5) : 72 \Rightarrow n-5 \in \{72, 144, \dots\} \Rightarrow$

$\Rightarrow n \in \{77, 149, \dots\}$

n - cel mai mic nr. natural de trei cifre care îndeplinește condițiile din enunț $\Rightarrow n = 149$

100 de zile PÂNĂ LA EXAMEN

5. Un turist a parcurs un traseu în trei zile. În a doua zi a parcurs cu 6 km mai puțin decât în prima zi, iar în a treia zi 50% din distanța parcursă în primele două zile.

(2p) a) Este posibil ca distanța parcursă de turist în primele două zile să reprezinte 50% din lungimea întregului traseu? Justifică răspunsul dat.

(3p) b) Știind că turistul a parcurs în a treia zi 9 km, determină lungimea traseului parcurs în prima zi.

(Evaluare Națională, 2021)

a) Dacă turistul parcurge în primele două zile 50% din lungimea traseului, în a treia zi ar parcurge 50% din 50% din lungimea traseului, adică 25% din lungimea traseului. Deci, nu este posibil.

b) x - lungimea traseului parcurs în prima zi

$\frac{50}{100} \cdot (x + x - 6) = 9 \Rightarrow \frac{1}{2}(2x-6) = 9 \mid \cdot 2 \Rightarrow 2x - 6 = 18 \Rightarrow 2x = 24 \Rightarrow$

$\Rightarrow x = 12$ km

6. Ana, Maria şi Vlad au în total 396 de timbre. Ana are cu 25 de timbre mai multe decât Maria şi cu 16 timbre mai puține decât Vlad.

(2p) a) Poate avea Ana 132 de timbre? Justifică răspunsul dat.

(3p) b) Determină numărul de timbre pe care le are Vlad.

(Evaluare Națională, 2022)

a) a - nr. de timbre ale Anei

v - nr. de timbre ale lui Vlad

m - nr. de timbre ale Mariei

$a = 132 \quad v = 132 + 16 = 148 \quad m = 132 - 25 = 107$

$132 + 148 + 107 = 387 \neq 396 \Rightarrow$ nu este posibil ca Ana să aibă 132 de timbre

b) $v = a + 16, \quad m = a - 25$

$a + m + v = 396 \Rightarrow a + a - 25 + a + 16 = 396 \Rightarrow 3a - 9 = 396 \Rightarrow$

$\Rightarrow 3a = 405 \Rightarrow a = 135 \rightarrow v = 135 + 16 = 151$ timbre

7. Maria are 14 ani și tatăl ei are 40 de ani.

(2p) a) Este posibil ca, peste 2 ani, suma dintre vârsta Mariei și vârsta tatălui ei să fie egală cu 60 de ani? Justifică răspunsul dat.

(3p) b) Determină peste câți ani vârsta Mariei va fi jumătate din vârsta tatălui ei.

(Evaluare Națională, 2023)

a) $14+2+40+2=58 \neq 60 \Rightarrow$ nu este posibil

b) x - nr de ani care vor trece până când vârsta Mariei va fi jumătate din vârsta tatălui ei.

$14+x=\frac{1}{2}\cdot(40+x) \mid \cdot 2 \Rightarrow 28+2x=4+x \Rightarrow x=12$ ani

8. Dacă elevii unei clase se așază câte 2 în fiecare bancă din laboratorul de fizică, atunci rămân 3 elevi în picioare. Dacă elevii se așază câte 4 în bancă, atunci rămân 5 bănci libere și o bancă în care stă un singur elev.

(2p) a) Verifică dacă în acea clasă pot fi 30 de elevi. Justifică răspunsul dat.

(3p) b) Determină numărul băncilor din laboratorul de fizică.

(Evaluare Națională, 2024)

a) e - nr. elevilor, b - nr. băncilor

$e=2b+3 \Rightarrow$ numărul de elevi este impar $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ nu pot fi 30 de elevi

b) $\left.\begin{array}{l} e=2b+3 \\ e=4\cdot(b-6)+1 \end{array}\right\} \Rightarrow 2b+3=4(b-6)+1 \Rightarrow 2b+3=4b-24+1 \Rightarrow$

$\Rightarrow 2b+3=4b-23 \Rightarrow 2b-4b=-23-3 \Rightarrow -2b=-26 \Rightarrow b=13$ bănci